7. Kvadratinės formos

1. **Kvadratinės formos apibrėžimas.** Tarkime, kad $A = \{a_{ij}\}$ – kvadratinė simetrinė matrica su realiais koeficientais a_{ij}. Taigi, $a_{ij} = a_{ji}$.

Apibrėžimas. Skaitinė vieno vektoriaus $x \in E_n$ funkcija

$$A(x,x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j, \tag{1}$$

kurioje $a_{ij} = a_{ji}$ – realieji skaičiai, vadinama **kvadratine forma**.

Atkreipkime dėmesį, kad (1) lygybės dešinėje pusėje esanti išraiška sutampa su dviejų vektorių Ax ir x skaliarine sandauga, apibrėžta 5 skyriuje, t.y.

$$A(x,x) = (Ax, x)$$

čia $A(x,x)$ – yra priimtas pažymėjimas, vientisas simbolis.

Jei imtume vektorių x is kompleksinės erdvės, t.y. jei vektoriaus x koordinatės x_i būtų kompleksiniai skaičiai, tai kvadratinė forma būtų apibrėžiama taip:

$$A(x,x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i \bar{x}_j;$$

čia, kaip paprastai $\bar{x}_j$ reiškia jungtinį kompleksinį skaičių, t.y. kompleksinį skaičių, jungtinį kompleksiniam skaičiui x_j.

Matrica $A = \{a_{ij}\}$ vadinama kvadratinės formos matrica.

2. **Kvadratinės formos kanoninis pavidalas.** Suformuluosime tokį klausimą: ar galima vietoje kintamųjų $x_1, x_2, \ldots, x_n$ parinkti tokius naujus kintamuosius $y_1, y_2, \ldots, y_n$, susietus su senaisiais kintamaisiais lygybėmis:

$$x_i = c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + \cdots + c_{in}y_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

kad kvadratinė forma įgautų galimai paprastesnį pavidalą:

$$A(x,x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i^2. \tag{3}$$

Kvadratinės formos pavidalas

$$\sum_{i=1}^{n} b_i y_i^2 \tag{4}$$

vadinamas **kanoniniu pavidalu**.

Kitaip paaiškinsime klausimą. Kadangi (2) lygybės reiškia, kad tarp vektoriaus $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ ir vektoriaus $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ yra atitinkamybė

$$x = Cy, \quad C = \{c_{ij}\}, \tag{5}$$

tai klausimą galima taip performuluoti:

Ar egzistuoja tokia vektoriaus x tiesinė transformacija

$$y = C^{-1}x \quad (x = Cy),$$

kad su nauju vektoriumi y kanoninė forma turėtų diagonalinį (kanoninį) pavidalą:

$$(Ax, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(Cy)_i(Cy)_j = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i^2. \tag{6}$$

Teorema. *Kvadratinei formai su bet kokia kvadratine matrica A visada egzistuoja transformacija $x = Cy$, tokia, kad kvadratinė forma įgauna kanoninį pavidalą.*

Įrodymas. Pažymėkime (1) kvadratinės formos matricos $A = \{a_{ij}\}$ tikrines reikšmes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, o joms atitinkančius tikrinius vektorius $x^1, x^2, \dots, x^n$. Kadangi A – simetrinė matrica, tai λ_i – realieji skaičiai, o vektoriai $x^i, i - \overline{1,n}$ yra ortonormuoti, t.y.

$$(x^i, x^j) = \begin{cases} 1, & \text{jei } i = j, \\ 0, & \text{jei } i \neq j. \end{cases} \tag{7}$$

Taigi, matricos A tikriniai vektoriai $x^1, x^2, \dots, x^n$ sudaro vektorinės erdvės E_n bazę. Išskleiskime bet kurį vektorių $x \in E_n$ šios bazės elementais:

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k x^k. \tag{8}$$

Apskaičiuokime kvadratinę formą $A(x, x)$:

$$\begin{aligned} A(x,x) &= (Ax, x) = (A\sum_{k=1}^{n} c_k x^k, \sum_{k=1}^{n} c_k x^k) = \\ &= (\sum_{k=1}^{n} c_k A x^k, \sum_{k=1}^{n} c_k x^k) = \\ &= (\sum_{k=1}^{n} c_k \lambda_k x^k, \sum_{k=1}^{n} c_k x^k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_k \lambda_k c_j (x^k, x^j). \end{aligned}$$

Pasinaudojus (7) savybe, gauname:

$$A(x,x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_k c_k^2. \tag{9}$$

Pažymėkime bet kurio tikrinio vektoriaus x^k koordinates x_j^k t.y.

$$x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)'.$$

(8) lygybę galima perrašyti taip:

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} c_k x_i^k, \quad i = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Apjunkime skaičius x_i^k į matricą $B = \{x_i^k\}_{i,k=1}^n$, o skaičius c_k – į vektorių

$$y = (c_1, c_2, \ldots, c_n)'.$$

Taigi (10) lygybė gali būti užrašyta taip

$$x = By.$$

Su vektoriumi $y = (c_1, c_2, \ldots, c_n)'$ kvadratinė forma įgauna (9) pavidalą. Teorema įrodyta.

Pastaba. Yra keletas konstruktyvių būdų, kaip suvesti kvadratinę formą

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

į kanoninį pavidalą $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i y_i^2$; suvedant gaunamos konkrečios išraiškos

$$x_i = c_{i1} y_1 + c_{i2} y - 2 + \ldots + c_{in} y_n.$$

Paminėsime tik jų pavadinimus (Lagranžo metodas, Jakobio metodas).

3. **Relėjaus santykis**. Panagrinėsime išraišką $A(x,x)$ arba (Ax,x). Kiekvienam vektoriui x – tai konkretus skaičius. Simetrinės matricos A tikrinės reikšmės $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – realieji skaičiai. Imkime didžiausią iš jų: $\max\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i$ ir mažiausią: $\min\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i$. Iš (9) lygybės gauname:

$$\min_{1 \le i \le n} \lambda_i \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \le (Ax, x) \le \max_{1 \le i \le n} \lambda_i \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \tag{11}$$

Analogiškai tam, kaip išvedėme (9) lygybę, gauname:

$$(x,x) = \Big(\sum_{k=1}^{n} c_k x^k, \sum_{k=1}^{n} c_k x^k \Big) = \sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j (x^k, x^j) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

Sulyginę gautą lygybę su (11), gauname:

$$\min_{1 \le i \le n} \lambda_i \cdot (x,x) \le (Ax,x) \le \max_{1 \le i \le n} \lambda_i \cdot (x,x)$$

arba

$$\min_{1 \le i \le n} \lambda_i \le \frac{(Ax,x)}{(x,x)} \le \max_{1 \le i \le n} \lambda_i.$$

Nesunku pastebėti, kad šiose nelygybėse tikrai galimas lygybės ženklas. Būtent, jei vietoj x imtume didžiausiai tikrinei reikšmei $\max\limits_{1\leq i\leq n} \lambda_i$ atitinkantį tikrinį vektorių (pažymėkime jį x^n), tai gautume:

$$\frac{(Ax^n, x^n)}{(x^n, x^n)} = \max_{1\leq i\leq n} \lambda_i.$$

Analogiškai gautume

$$\frac{(Ax^1, x^1)}{(x^1, x^1)} = \min_{1\leq i\leq n} \lambda_i,$$

kur x^1 pažymėtas tikrinis vektorius, atitinkantis mažiausiai tikrinei reikšmei. Taigi, gauname:

$$\max_{x\in E_n} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \max_{1\leq i\leq n} \lambda_i, \quad \min_{x\in E_n} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \min_{1\leq i\leq n} \lambda_i.$$

Dydis

$$\frac{(Ax, x)}{(x, x)}$$

vadinamas **Relėjaus santykiu**.