## 2. Algebriniai daugianariai ir jų šaknys
(Algebrinės lygtys ir jų sprendimas)

**2.1. Apibrėžimas ir pavyzdžiai**. Imkime kintamąjį $x \in (-\infty, \infty)$. Funkcija

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \tag{2.1}$$

kai $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – skaičiasi, $a_0 \neq 0$ vadinamas $n$-tosios eilės ($n$-tojo laipsnio) **algebriniu daugianariu** arba tiesiog daugianariu.

Skiriami du atvejai: $a_i, i = 0, 1, \ldots, n$ yra realieji skaičiai arba kompleksiniai skaičiai. Paprastai, jeigu tik neužakcentuosime priešingai, laikysime, kad $a_i$ – realieji skaičiai.

Pastebėkime, kad nulinės eilės daugianariai yra skaičiai. Skaičius 0 – irgi daugianaris, bet jo eilė neapibrėžta.

Du daugianariai yra lygūs, jei koeficientai prie tų pačių $x$ laipsnių yra lygūs.

Gana paprastai ir natūraliai apibrėžiami daugianarių sudėties, atimties ir daugybos veiksmai.

Dviejų daugianarių $f(x)$ ir $g(x)$ suma (skirtumu) vadiname tokį daugianarį, kurio koeficientas prie kiekvieno $x$ laipsnio lygus sumai (skirtumui) koeficientų prie to paties $x$ laipsnio daugianariuose $f(x)$ ir $g(x)$.

**1 Pvz.**

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 1; \quad g(x) = x^2 + 1;$$
$$f(x) + g(x) = x^3 - 3x^2 + x^2 + x + 2;$$
$$f(x) - g(x) = x^3 - 5x^2 + x.$$

Dauginami daugianariai, kiekvieną $f(x)$ daugianario narį padauginant iš kiekvieno $g(x)$ daugianario nario ir sudedant visas gautas sandaugas, po to, jeigu reikia, sutraukiant panašius narius. Jei $f(x)$ eilė $n$, o $g(x)$ eilė $m$, tai visuomet $f(x)g(x)$ – daugianaris, kurio eilė $n + m$.

**2 Pvz.**

$$f(x) = x^2 - 3x + 2, \quad g(x) = x^2 + 2x - 3;$$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 3x^3 - 6x^2 + 9x + 2x^2 + 4x - 6 = \\ &= x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6. \end{aligned}$$

**2.2. Daugianarių dalyba. Hornerio schema.** Daugianarių dalyba nevisada galima, tiksliau, dalinant vieną daugianarį iš kito, nevisada šitai galima atlikti be liekanos. Panašiai kaip sveiką skaičių dalinant iš sveiko skaičiaus, nevisada gausime sveiką skaičių, kai kada liks liekana.

**2.2.1. Daugianarių dalyba su liekana.**

Visuomet galima atlikti daugianarių dalybą su liekana, t.y. bet kokiems daugianariams $f(x)$ ir $g(x)$ galima vienareikšmiškai užrašyti lygybę

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x), \tag{2.2}$$

kurioje $q(x)$ ir $r(x)$ – tam tikri daugianariai; daugianario $r(x)$ eilė visuomet mažesnė už daugianario $g(x)$ eilę (arba $r(x) = 0$). $r(x)$ vadinama dalybos **liekana**.

**3 Pvz.**

$$f(x) = x^3 - 1; \quad g(x) = x^2 + x + 1;$$

Turime

$$x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1)$$

taigi, daugianaris $f(x)$ dalijasi iš daugianario $g(x)$ be liekanos ($r(x) = 0$).

**4 Pvz.**

$$f(x) = x^2 + 2; \quad g(x) = x - 1.$$

Šiuo atveju

$$x^2 + 2 = (x - 1)(x + 1) + 3$$

taigi $r(x) = 3$. $f(x)$ nesidalina iš $g(x)$ be liekanos.

**2.2.2. Dalybos su liekana algoritmas.**

Trumpai paaiškinsime dalybos algoritmą pavyzdžiu, kai $f(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 + 14x - 2, g(x) = x^2 + 2x - 3$ (žr. žemiau schemą). Parenkame narį ($x^2$), tokį, kad padauginus jį iš $g(x)$ pirmojo nario ($x^2$), gautume $f(x)$ pirmąjį narį ($x^4$). Padauginame $g(x)$ iš parinkto nario ($x^2$) ir gautą daugianarį (užrašę jį po daugianariu $f(x)$), atimame iš $f(x)$. Su gautu skirtumu vėl pradedame dalybą iš naujo, t.y. parenkame narį ($-3x$), kurį padauginus iš $g(x)$ pirmojo nario ($x^2$) gautume skirtumo pirmąjį narį ($-3x^3$) ir t.t. Procesą užbaigiame, kai skirtumas yra arba lygus nuliui, arba jo eilė mažesnė už $g(x)$ eilę.

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - \ x^3 - 9x^2 + 14x - 2 & x^2 + 2x - 3 \\
-(+x^4 + 2x^3 - 3x^2) \qquad\qquad & \\
\hline
 & x^2 - 3x \\
-3x^3 - 6x^2 + 14x - 2 & \\
-(-3x^3 - 6x^2 + 9x) \quad\ \ & \\
\hline
5x - 2 &
\end{array}$$

Gavome

$$(x^4 - x^3 - 9x^2 + 14x - 2) = (x^2 + 2x - 3)(x^2 - 3x) + (5x - 2).$$

**2.2.3. Dalyba iš dvinario. Hornerio schema.** Padalinkime (2.1) daugianarį iš pirmosios eilės daugianario $(x - b)$ :

$$
\begin{array}{l|l}
\quad a_0x_0^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n & x - b \\
-(a_0x^n - a_0bx^{n-1}) & \\
\hline
 & a_0x^{n-1} + (a_1 + a_0b)x^{n-2} + \ldots \\
\quad (a_1 \ + \ a_0b)x^{n-1} \ + \ a_2x^{n-2} \ + \ \ldots & \\
-((a_1 + a_0b)x^{n-1} - (a_1 + a_0b)bx^{n-2}) &
\end{array}
$$

Šiam dalybos procesui atlikti patogu naudoti **Hornerio schemą:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $\ldots$ | $a_{n-1}$ | $a_n$ |
| $b$ | $a_0$ | $b_1$ | $b_2$ | $\ldots$ | $b_{n-1}$ | $b_n$ |

kurioje viršutinėje eilutėje iš eilės surašomi skaičiai $a_0, a_1, \ldots, a_n$; apatinėje eilutėje du pirmieji skaičiai $b$ ir $a_0$. Likusieji skaičiai surandami pagal tokias formules

$$
\begin{array}{l}
b_1 = a_0b + a_1, \\
b_2 = b_1b + a_2, \\
b_3 = b_2b + a_3, \\
\ldots\ldots\ldots \\
b_{n-1} = b_{n-2}b + a_{n-1}, \\
b_n = b_{n-1}b + a_n,
\end{array}
\tag{2.3}
$$

Tada

$$
\begin{gathered}
a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = \\
= (a_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1})(x - b) + b_n
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

**Pvz.** Sudarome Hornerio schemą. Pradžioje surašome

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 0 | -3 | 5 |
| 4 | 2 | | | |

Po to pradedame skaičiuoti pagal (2.3) formules:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 0 | -3 | 5 |
| 4 | 2 | 8 | 29 | 121 |

Taigi,

$$2x^3 - 3x + 5 = (2x^2 + 8x + 29)(x - 4) = 121.$$

Dabar užrašykime (2.2) formulę, kai $g(x) = x - b$ :

$$f(x) = (x - b)q(x) + r; \tag{2.5}$$

čia $r = const$. Įrašome į (2.5) formulę $x = b$ :

$$f(b) = r. \tag{2.6}$$

Taigi, iš (2.6) gausime išvadą: norint atsakyti į klausimą, kokia bus liekana dalinant $f(x)$ iš $x-b$, galima apskaičiuoti $f(x)$ reikšmę taške $x=b$ – ši reikšmė lygi dalybos liekanai.

Jei $r=0$, sakome, kad $f(x)$ dalosi iš $x-b$ be liekanos.

### 2.3. Daugianario šaknys.

**Apibrėžimas.** *Jei imant $x=c$ daugianaris $f(x)$ įgauna reikšmę $f(c)=0$, tai skaičius $c$ vadinamas* **daugianario $f(x)$ šaknimi**.

Sulyginę šį apibrėžimą su (2.6) formule, galime pasakyti taip: skaičius $c$ yra daugianario $f(x)$ šaknis, jei daugianaris $f(x)$ dalosi iš $x-c$ be liekanos.

**Apibrėžimas.** *Jei daugianaris $f(x)$ dalosi iš $(x-c)^k$ be liekanos, $k \geq 1$ – sveikas teigiamas skaičius, bet nesidalo be liekanos iš $(x-c)^{k+1}$, tai $c$ vadinamas* **k-kart kartotine šaknimi**.

**6 Pvz.** Imkime $f(x)=(x-c)^3 q(x)$, $q(x)$ – nesidalina iš $x-c$. Išsiaiškinsime, kaip kitaip galima nusakyti dalybą iš $(x-c)^k$ be liekanos. Suraskime daugianario $f(x)$ tris pirmąsias išvestines:

$$f'(x)=3(x-c)^2 q(x)+(x-c)^3 q'(x),$$

$$f''(x)=6(x-cq(x))=6(x-c)^2)'(x)+(x-c)^3 q''(x),$$

$$f'''(x)=6q(x)+18(x-c)q'(x)+9(x-c)^2 q''(x)+(x-c)^3 q'''(x).$$

Įrašydami $x=c$, gauname

$$f(c)=0,\ f'(c)=0,\ f''(c)=0.\ f'''(c)=6q(c)\neq 0.$$

**Išvada:** Jei $f(x)$ dalinasi be liekanos iš $(x-c)^3$, bet nesidalina be liekanos iš $(x-c)^4$, tai

$$f(c)=f'(c)=f''(c)=0, \quad f'''(c)\neq 0.$$

Pasirodo, analogiška išvada teisinga, esant bet kokiam šaknies $x=c$ kartotinumui. Todėl k-kart kartotinę šaknį galima apibrėžti ir tokiu būdu.

**Apibrėžimas.** *Jei*

$$f(c)=f'(c)=\ldots=f^{(k-1)}(c)=0,$$

$$f^{(k)}(c)\neq 0,$$

*tai skaičius c vadinamas* **k-kart kartotine šaknimi**.

**Pastaba.** Daugianario $f(x)$ šaknis, kaip minėta, apibrėžiama lygybe $f(c) = 0$. Todėl paaprastai galima pasakyti ir kitaip: daugianario $f(x)$ šaknis yra **lygties** $f(x) = 0$ **sprendinys**.

Iš tikrųjų, įrašius į lygtį $f(x) = 0$ reikšmę $x = c$, gauname tapatybę $f(c) = 0$. Greta sąvokos "lygties sprendinys" vartojama ir sąvoka "lygties šaknis" kaip sinonimas. Bet sąvokos "daugianario sprendinys" reikia vengti, tai nelogiškas žodžių junginys.

**2.4. Pagrindinė algebros teorema.** Be įrodymo pateiksime teoremą, vadinama pagrindine algebros teorema, apie daugianario šaknies egzistavimą.

**Teorema** (pagrindinė algebros teorema). *Jei $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – kompleksiniai skaičiai, tai daugianaris turi bent vieną kompleksinę (ar realią) šaknį.*

**Pastaba**. Teoremoje daugianaris imamas su kompleksiniais koeficientais $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Aišku, atskiras atvejis – visi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ yra realieji skaičiai. Bet realiųjų koeficientų atveju tvirtinimas lygiai toks pat: egzistuoja bent viena kompleksinė (gal reali, bet nebūtinai reali) šaknis.

**1 Išvada**. Užrašykime teoremos tvirtinimą tokia formule:

$$f(x) = (x - c_1)q_1(x),$$

kurioje $q_1(x)$ – $(n-1)$-osios eilės daugianaris. Pagal tą pačią teoremą:

$$q_1(x) = (x - c_2)q_2(x),$$

$q_2(x)$ – $(n-2)$-osios eilės daugianaris. Tęsdami tokį procesą toliau, gautume

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n).$$

Taigi, galutinai gauname išvadą: $n$-tosios eilės daugianaris turi lygiai $n$ kompleksinių (ar realių) šaknų.

Daugianario šaknys gali būti tiek kartotinės, tiek nekartotinės (paprastosios).

**2.5. Daugianario šaknų radimas.** Išnagrinėsime paprasčiausius atvejus, kai galime surasti visas daugianario šaknis:

2.5.1. $n = 1$, t.y.

$$a_0 x + a_1 = 0, \quad a_0 \neq 0.$$

Iš čia

$$x = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Uždavinys pilnai išspręstas. Pirmosios eilės (tiesinis) daugianaris turi vieną šaknį – ją ir radome.

2.5.2. $n = 2$, t.y.

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0, \quad a_0 \neq 0.$$

Tai kvadratinė lygtis. Jos šaknys yra:

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}.$$

Priklausomai nuo to, ar pošaknyje esantis skaičius $a_1^2 - 4a_0a_2$ yra teigiamas, neigiamas ar lygus nuliui, kvadratinė lygtis turi dvi skirtingas realias šaknis, dvi jungtines kompleksines šaknis, ar vieną du-kart kartotinę šaknį.

2.5.3. $n = 3$, t.y.

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \quad a_0 \neq 0.$$

arba

$$x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0,$$

čia

$$b_1 = \frac{a_1}{a_0}, \quad b_2 = \frac{a_2}{a_0}, \quad b_3 = \frac{a_3}{a_0}.$$

Įrašydami į lygtį

$$x = y - \frac{b_1}{3}$$

lygtį suvedame į pavidalą

$$y^3 + py + q = 0,$$

kur

$$p = \frac{b_1^2}{3} + b_2 \quad q = -\frac{2b_1^3}{3} - \frac{b_1b_2}{3} + b_3.$$

Lygties $y^3 + py + q = 0$ sprendinius galime apskaičiuoti įvairiais būdais. Be įrodymo pateikiame tokią formulę (**Kardano formulė**):

$$y = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}.$$

Taikant šią formulę, reikia kiekvienai iš trijų šaknies

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}$$

reikšmei imti tą šaknies

$$\beta = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}$$

reikšmę, su kuria teisinga lygybė

$$\alpha\beta = -\frac{p}{3}.$$

Suradus $y_1, y_2, y_3$ galutinai apskaičiuojame

$$x_1 = y_1 - \frac{b_1}{3}, \quad x_2 = y_2 - \frac{b_1}{3}, \quad x_3 = y_3 - \frac{b_1}{3}.$$

2.5.4. $n = 4$. Jau $n = 3$ atveju šaknų radimo formulės pakankamai sudėtingos. Ketvirtos eilės lygčiai irgi visada galima užrašyti bendras šaknų radimo formules, tačiau jos yra dar labiau sudėtingos, negu $n = 3$ atveju.

Tačiau yra griežtai įrodyta, kad bet kuriam $n \geq 5$ negalime užrašyti bendrųjų formulių šaknims rastri, naudojant paprasčiausius elementarios matematikos veiksmus: sudėtį, atimtį, daugybą, dalybą, šaknies traukimą, kėlimą laipsniu. Sakome, kad algebrinės lygties

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

sprendinius, kai $n \geq 5$ negalime **išreikšti radikalais.**

Aišku, visuomet galima surasti paprasčiausius lygties pavyzdžius, kuriuos išspręsti mokame. Tokia išsprendžiama lygtimi yra

$$x^n - 1 = 0,$$

imant bet kokį sveiką skaičių $n$ (žr. 1 skyrių, 8 pvz.). Bet imant $n \geq 5$ visuomet yra tokių lygčių, kad bendru pavidalu jų išspręsti radikalais negalime.

**2.6. Pagrindiniai teiginiai apie daugianario šaknis.**

Šiame skyrelyje daroma prielaida, kad daugianario koeficientai yra realieji skaičiai.

Pateiksime be įrodymų keletą teoremų apie daugianarių su realiaisiais koeficientais realiųjų šaknų skaičių ir intervalą, kuriame randasi šaknys.

2.6.1. Jei skaičius $a + ib$ yra daugianario su realiaisiais koeficientais šaknis, tai $a - ib$ – irgi šaknis. Labai svarbus šio teiginio perfrazavimas: kompleksinių šaknų yra lyginis skaičius. Taigi, kai daugianario eilė $n$ – nelyginis skaičius, tai toks daugianaris turi bent vieną realiąją šaknį.

2.6.2. Tarkime, kad daugianario

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \tag{2.7}$$

koeficientai sveikieji skaičiai. Pažymėkime daugianario šaknis $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Kadangi

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n), \tag{2.8}$$

tai sulyginę (2.7) ir (2.8) išraiškas, galime parašyti:

$$a_n = (-1)^n x_1 x_2 \cdots x_n.$$

Taigi, jei daugianario šaknys būtų sveikieji skaičiai, tai jie gali būti skaičiaus $a_n$ dalikliai su pliuso ar minuso ženklu.

**7 Pvz.** Imkime

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 21x - 5.$$

Patikriname, ar skaičiaus 5 dalikliai 1,-1,5,-5 nėra daugianario $f(x)$ šaknys. Tuo tikslu apskaičiuojame:

$$f(-5) = -460, \quad f(-1) = -36, \quad f(1) = 8, \quad f(5) = 0.$$

Taigi $x = 5$ yra šaknis. Kadangi $f'(x) = 3x^2 - 18x + 21, f'(5) = 6 \neq 0$, tai ši šaknis nėra kartotinė.

2.6.3. Jei $a$ ir $b(a < b)$ yra bet kurie du realieji skaičiai, ir

$$f(a)f(b) < 0,$$

tai intervale $[a, b]$ yra bent viena daugianario $f(x)$ šaknis.

Grįžkime prie 7 Pvz. Turime

$$f(-1) = -36, \quad f(1) = 8,$$

taigi, intervale $[-1, 1]$ yra bent viena šaknis. Beto, imkime keletą taškų iš intervalo $[1, 5]$ ir apskaičiuokime juose $f(x)$ reikšmes:

$$f(2) = 9, \quad f(3) = 4, \quad f(4) = -1.$$

Taigi dar viena šaknis yra intervale $[3, 4]$. Taigi, apie daugianario $x^3 - 9x^2 + 21x - 5$ šaknis jau gavome gana daug informacijos. Yra trys realiosios šaknys:

$$x_1 \in [-1, 1], \quad x_2 \in [3, 4], \quad x_3 = 5.$$

Galima daugianarį $f(x)$ padalinti iš $x - 5$ pagal Hornerio schemą. Taigi

$$(x^3 - 9x^2 + 21x - 5) = (x - 5)(x^2 - 4x + 1)$$

Dabar galime rasti $x^2 - 4x + 1$ šaknis:

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 1} = 2 \pm \sqrt{3}, \quad x_1 = 2 - \sqrt{3} \approx 0,27; \quad x_2 = 2 + \sqrt{3} \approx 3,73.$$

2.6.4. Jei $a < b$ ir $f(a)f(b) > 0$, tai intervale $[a, b]$ arba nėra $f(x)$ šaknų, arba realiųjų šaknų skaičius šiame intervale yra lyginis.

2.6.5. Daugianario $f(x)$ visos realiosios šaknys, jei jos egzistuoja, priklauso intervalui $[-N, N)$; čia

$$N = 1 + \frac{A}{|a_0|},$$

$A$ – didžiausias iš skaičių $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|$.

Imkime vėl 7 Pvz. čia $A = 21, a_0 = 1$. taigi

$$N = 22.$$

$x_1, x_2, x_3 \in [-22, 22]$. Taigi, ši informacija pakankamai neefektyvi šiam pavyzdžiui.

2.6.6. **Dekarto teorema**. *Teigiamų šaknų skaičius yra arba lygus koeficientų $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ženklų pasikeitimui arba mažesnis už jį lyginiu skaičiumi.*

Vėl imkime 7 Pvz. Išrašome $f(x)$ koeficientus:

$$1, -9, 21, -5,$$

arba

$$+ \quad - \quad + \quad -,$$

taigi, ženklas keičiasi tris kartus. Taigi, realiųjų šaknų yra arba 3 arba 1.

2.6.7. **Sustiprintoji Dekarto teorema**. *Jei visos daugianario šaknys – realieji skaičiai, tai teigiamųjų šaknų skaičius lygus koeficientų ženklų pasikeitimų skaičiui; o neigiamų šaknų skaičius lygus daugianario $f(-x)$ koeficientų ženklų pasikeitimų skaičiui.*

Imkime 7 Pvz. $f(x)$ koeficientai: $1, -9,\ 21, -5$ yra 3 ženklų pasikeitimai. Taigi, yra trys teigiamos šaknys, ir nei vienos – neigiamos.

$f(-x)$ koeficientai: $-1, -9, -21, -5$ – nėra ženklų pasikeitimų.

2.7.**Pusiaukirtos (bisekcijos) metodas**. Kai žinomas intervalas $[a, b]$, kuriame yra viena lygties $f(x) = 0$ šaknis, šią šaknį galima apytiksliai apskaičiuoti norimu tikslumu. Šakniai apskaičiuoti yra daug iteracinių metodų. Čia aprašysime vieną jų – **bisekcijos** arba **pusiaukirtos** metodą. Šio metodo esmė – intervalo, kuriame yra šaknis, dalinimas pusiau. Pusiaukirtos metodą galima pradėti taikyti, kai žinome, kad intervalo galuose $f(x)$ yra priešingų ženklų:

$$f(a)f(b) < 0. \tag{2.10}$$

Pažymėkime

$$x_0 = \frac{a + b}{2}$$

ir apskaičiuokime $f(x_0)$. Jei $f(x_0)f(a) < 0$, tai šaknis yra intervale $[a, x_0]$, jei $f(x_0)f(b) < 0$, tai šaknis priklauso intervalui $[x_0, b]$. Tokiu būdu, intervalą, kuriame yra šaknis, sumažinome pusiau. Naująjį intervalą, kuriame yra šaknis, pažymėkime $[a_1, b_1]$ ir vėl imame

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

ir apskaičiuojame $f(x_1)$. Vėl tikriname, ar $f(x_1)f(a_1) < 0$, ar $f(x_1)f(b_1) < 0$, ir vėl intervalą, kuriame yra šaknis, sumažiname pusiau. Taip žingsnis po žingsnio intervalą sumažinome iki norimo dydžio.

Kai $b_k - a_k < \varepsilon, \varepsilon$ – norimas tikslumas, skaičius

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

skiriasi nuo tikrosios šaknies reikšmės nedaugiau kaip $\varepsilon/2$ (galutinio intervalo pusė ilgio).

**Pastaba.** Jei intervale $[a, b]$ yra tik viena šaknis, tai iteraciniu metodu būtent šią šaknį ir surasime. Bet jei intervale yra daugiau negu viena šaknis (trys, penkios ir t.t.), tai šiuo metodu surasime tik vieną. Jeigu nežinome, kiek intervale $[a, b]$ yra šaknų: viena, trys, penkios ir t.t., tai suradę vieną šaknį be papildomų pastangų nesužinosime, kiek jų buvo.