5. Simetrinės matricos

1. **Apibrėžimas ir pavyzdžiai**. Imkime kvadratinę matricą su realiais elementais:

$$A = \{a_{ij}\}, \quad i, j = \overline{1, n},$$

a_{ij} – realieji skaičiai.

Apibrėžimas. Kvadratinė matrica su realiaisiais elementais $A = \{a_{ij}\}$ vadinama **simetrine**, jei

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Apibrėžimas. Kvadratinė matrica $A = \{a_{ij}\}$ su realiaisiais elementais vadinama **įstrižai simetrine (antisimetrine)**, jei

$$a_{ij} = -a_{ji}.$$

Iš įstrižai simetrinės matricos apibrėžimo, imdami $i = j$, gauname

$$a_{ii} = -a_{ii}.$$

Iš čia gauname: $a_{ii} = 0$. Taigi, įstrižai simetrinės matricos diagonaliniai elementai yra lygūs nuliui.

Pavyzdžiai:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{– simetrinė,}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{– įstrižai simetrinė,}$$

2. **Transponuota matrica**. Matricos **transponavimu** vadiname veiksmą, kurio išdavoje matricos eilutės tampa stulpeliais, o stulpeliai – eilutėmis, nekeičiant eilučių ar stulpelių tarpusavio tvarkos. Taigi, jei matricos A elementai yra a_{ij} tai transponuotos matricos eleemantas, esantis i-tosios eilutės ir j-tojo stulpelio susikirtime, yra ne a_{ij}, kaip matricoje A, bet a_{ji}. Transponuota matrica žymima A' arba $A^\top$.

Pvz. Jei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

tai

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Jei A – simetrinė, tai $A = A'$

Jei A – įstrižai simetrinė, tai $A = A'$.

Toliau, jei dar kartą transponuosime transponuotą matricą A', tai gausime tai, ką turėjome prieš pirmą transponavimą, t.y.

$$\left(A'\right)' = -A.$$

Teorema. *Kiekvieną matricą A su realiaisiais elementais visuomet galima užrašyti kaip simetrinės ir įstrižai simetrinės matricų sumą.*

Įrodymas. Užrašykime tapatybę

$$A = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} + \frac{A'}{2} - \frac{A'}{2}.$$

Iš čia gauname

$$A = \frac{A + A'}{2} + \frac{A - A'}{2}$$

arba

$$A = B + C, \tag{1}$$

kur

$$B = \frac{A + A'}{2}, \quad C = \frac{A - A'}{2}.$$

Patikriname, kad B yra simetrinė, o C – įstrižai simetrinė.

$$B' = \left(\frac{A + A'}{2}\right)' = \frac{A + A'}{2} = B \quad \text{– simetrinė,}$$

$$C' = \left(\frac{A - A'}{2}\right)' = \frac{A' - A}{2} = -\frac{A - A'}{2} = -C \quad \text{– įstrižai simetrinė.}$$

Teorema įrodyta.

Teorema. *Matricos A ir A' turi tas pačias tikrines reikšmes.*

Įrodymas. Matricos A tikrinės reikšmės yra štai tokios lygties šaknys:

$$\det(A' - \lambda E) = 0. \tag{2}$$

Analogiškai, matricos A' tikrinės reikšmės yra šios lygties

$$\det(A' - \lambda E) = 0 \tag{3}$$

šaknys. Kadangi $\det A = \det A'$, tai (2) ir (3) daugianariai yra tie patys, taigi A ir A' tikrinės reikšmės yra to paties daugianario šaknys.

Teorema įrodyta.

Pastaba. Matricų A ir A' tikriniai vektoriai skirtingi. Ištikrųjų, tikriniai vektoriai yra lygčių sistemų

$$(A' - \lambda E)x = 0,$$
$$(A' - \lambda E)y = 0,$$

sprendiniai, o atlikus transponavimo veiksmą lygčių sistemai, gauname kitą lygčių sistemą, taigi ir sprendiniai bus skirtingi.

Apibendrinsime transponavimo veiksmą matricoms su kompleksiniais elementais. Imkime

$$A = \{a_{kj}\},$$

$a_{kj} = \alpha_{kj} + i\beta_{kj}$, $i = \sqrt{-1}$. Apibrėšime naują matricą A^*. Operacija $*$ („žvaigždutė") reiškia, kad matrica transponuota ir vietoje elementų a_{kj} paimti jų jungtiniai skaičiai

$$\overline{a}_{kj} = \alpha_{kj} - i\beta_{kj}.$$

Pvz.

$$A = \begin{pmatrix} 2+i & -4i \\ 3-3i & -1+4i \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 2-i & 3+3i \\ 4i & -1-4i \end{pmatrix}.$$

Jei a_{ij} – realieji skaičiai, t.y. $\bar{a}_{ij} = a_{ij}$, tai

$$A^* = A'.$$

Apibrėžimas. Jei $A^* = A$, matrica vadinama **Ermito matrica**.

Aišku, jei a_{ij} – realieji skaičiai, tai sąvoka "Ermito matrica" sutampa su sąvoka „simetrinė matrica".

Pvz. Matrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3-i \\ 3+i & 4 \end{pmatrix}.$$

yra Ermito matrica, nes $A^* = A$. Bet matrica

$$A = \begin{pmatrix} 2+i & 3-i \\ 3+i & 4+3i \end{pmatrix}.$$

nėra Ermito matrica, kadangi

$$A^* = \begin{pmatrix} 2-i & 3-i \\ 3+i & 4-3i \end{pmatrix} \neq A.$$

Taigi, iš $A^* = A$ (A – Ermito matrica) gauname

$$\bar{a}_{ii} = a_{ii},$$

t.y. a_{ii} – realieji skaičiai. Ermito matricos diagonaliniai elementai turi būti realieji skaičiai. Be įrodymo pateikiame svarbią lygybę:

$$\big(AB\big)' = B'A'.$$

Panašiai buvo su atvirkštinės matricos veiksmu:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

3. **Vektorių skaliarinė sandauga ir ortogonalieji vektoriai.** Imkime du vektorius-stulpelius

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Matricų transponavimo veiksmas, aprašytas praeitame skyrelyje, tinka ne tik kvadratinėms matricoms, bet ir stačiakampėms matricoms. Pritaikę matricų transponavimo veiksmą vektoriui-stulpeliui, turime stulpelį rašyti eilute. Taigi

$$x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Anksčiau jau buvome rašę

$$x = \big(x_1, x_2, \ldots, x_n\big)' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Taigi, x – stulpelis, x' – eilutė. Čia ir svarbu, ir įdomu pastebėti, kad

$$x'x = \big(x_1, x_2, \ldots, x_n\big) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

yra skaičius, o

$$xx' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \big(x_1, x_2, \ldots, x_n\big) = \begin{pmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & \ldots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2x_2 & \ldots & x_2x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \ldots & x_nx_n \end{pmatrix}$$

yra matrica.

Apibrėžimas. Dviejų vektorių

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

skaliarine sandauga vadiname skaičių

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n. \tag{4}$$

Taigi, galime pastebėti, kad

$$(x, y) = x' y. \tag{4a}$$

Panagrinėsime, kas yra $(Ax)'$. Ax yra vektorius, kurio i-toji koordinatė yra

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

Taigi, Ax yra vektorius-stulpelis

$$Ax = \{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\}_{i=\overline{1,n}}.$$

Apskaičiuokime $x'A'$:

$$\begin{aligned} x'A' &= \begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \Big) = (Ax)'. \end{aligned}$$

Taigi, gavome svarbią formulę

$$(Ax)' = x'A'. \tag{5}$$

Svarbu pakartotinai pabrėžti, kad šioje formulėje x yra vektorius-stulpelis, o x' – vektorius-eilutė.

Apibrėžus (4) formule skaliarinę sandaugą, galima apibrėžti vektoriaus ilgį:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{6}$$

Dydis $\|x\|$ vadinamas taip pat vektoriaus norma, o geometrinė šio dydžio interpretacija, kaip minėta, yra vektoriaus ilgis.

Teorema. *Bet kuriems vektoriams x ir y yra teisinga nelygybė*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \tag{7}$$

Įrodymas. Imkime bet kurį skaičių α ir sudarykime vektorių $z = \alpha x - y$. Pagal (6) formulę $\|z\| \geq 0$. Perdirbame $\|z\|$:

$$\|z\|^2 = (z, z) = (\alpha x - y, \alpha x - y) = \alpha^2(x, x) - 2\alpha(x, y) + (y, y).$$

Kadangi $\|z\| \geq 0$, tai

$$\alpha^2(x, x) - 2\alpha(x, y) + (y, y) \geq 0.$$

Kairėje šios nelygybės pusėje yra kvadratinis trinaris α atžvilgiu su neneigiamu koeficientu prie α : $(x, x) \geq 0$. Jei kvadratinis trinaris su neneigiamu koeficientu prie α^2 yra visada teigiamas, tai kvadratinės lygties šaknys turi būti kompleksinės, t.y. diskriminantas (pošaknis) yra neigiamas:

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0.$$

Iš čia ir seka (7) nelygybė. Teorema įrodyta.

(7) nelygybė vadinama **Košy-Buniakovskio nelygybe**.

Apibrėžimas. Kampas φ tarp dviejų vektorių x ir y apibrėžiamas lygybe:

$$(x, y) = \|x\| \cdot \|y\| \cos \varphi. \tag{8}$$

Ištikrųjų, (8) formulė yra visada prasminga, kadangi, sutinkamai su (7) formule

$$0 \leq \frac{|(x, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1,$$

taigi $-1 \leq \cos \varphi \leq 1$ ir φ yra vienareikšmiai apibrėžiamas intervale $\varphi \in [0, \pi]$.

Taigi, jei $\cos \varphi = 0$, tai $\varphi = \pi/2$. Iš čia kilęs sekantis apibrėžimas:

Vektoriai x ir y yra **ortogonalūs**, jei $(x, y) = 0$.

Ištikrųjų, jei $(x, y) = 0$, tai $\cos \varphi = 0, \varphi = \pi/2$, o $\varphi = \pi/2$ geometrijoje susijęs su sąvoka "status kampas" arba "ortogonalu".

4. **Simetrinės matricos tikrinės reikšmės ir tikriniai vektoriai.** Įrodysime dvi pagrindines teoremas.

Teorema. *Simetrinės matricos visos tikrinės reikšmės yra realieji skaičiai.*

Įrodymas. Pažymėkime simetrinės matricos A tikrinę reikšmę λ ir jai atitinkantį tikrinį vektorių x :

$$Ax = \lambda x. \tag{9}$$

Kadangi λ ir x gali būti bendru atveju kompleksiniai, imkime paskutinėje lygybėje kompleksiškai jungtinius skaičius:

$$\bar{A}\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}.$$

Kadangi matricos A elementai – realieji skaičiai, tai $\bar{A} = A$, taigi

$$A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}.$$

Toliau

$$(A\bar{x})' = (\bar{\lambda}\bar{x})'.$$

arba

$$\bar{x}'A = \bar{x}'\bar{\lambda}. \tag{10}$$

(9) lygybės abi puses padauginkime iš kairės iš vektoriaus $\bar{x}'$:

$$\bar{x}'Ax = \bar{x}'\lambda x. \tag{11}$$

(10) lygybės abi puses padauginkime iš dešinės iš vektoriaus x :

$$\bar{x}'Ax = \bar{x}'\bar{\lambda}x. \tag{12}$$

(11) ir (12) lygybių kairiosios pusės lygios, taigi

$$\bar{x}'\lambda x = \bar{x}'\bar{\lambda}x$$

arba

$$\lambda\bar{x}'x = \bar{\lambda}\bar{x}'x.$$

Kadangi $\bar{x}'x \neq 0$ (x – tikrinis vektorius), tai

$$\lambda = \bar{\lambda}.$$

Taigi λ – realusis skaičius. Teorema įrodyta.

2 Teorema. *Jei A – simetrinė matrica,*

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1, \tag{13}$$

$$Ax_2 = \lambda_2 x_2, \tag{14}$$

ir $\lambda_1 \neq \lambda_2$, *tai* $(x_1, x_2) = 0$.

Įrodymas. Padauginkime (13) lygybę iš kairės iš x_2' :

$$x_2'Ax_1 = \lambda_2 x_2'x_1.$$

(14) lygybę pirmiausia transponuokime

$$x_2'A = \lambda_2 x_2',$$

o dabar padauginkime iš dešinės iš x_1 :

$$x_2' A x_1 = \lambda_2 x_2' x_1. \tag{16}$$

Iš (15) ir (16) lygybių gauname

$$\lambda_1 x_2' x_1 = \lambda_2 x_2' x_1$$

arba

$$(\lambda_1 - \lambda_2) x_2' x_1 = 0.$$

Kadangi $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, tai

$$x_2' x_1 = 0.$$

Pagal (4a) lygybę

$$(x_2, x_1) = 0.$$

Taigi vektoriai x_1, x_2 – ortogonalūs. Teorema įrodyta.

Be įrodymo pateikiame bendresnę teoremą.

3 Teorema. *Jei A – simetrinė matrica, tai egzistuoja n tiesiškai nepriklausomų tikrinių vektorių x^i, tenkinančių sąlygas:*

$$(x^i, x^j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

t.y. simetrinės matricos tikriniai vektoriai yra ortonormuoti (tarpusavy ortogonalūs, ir vektorių norma arba ilgis lygi vienetui).