1. Kompleksiniai skaičiai

1.1. Kompleksinio skaičiaus apibrėžimas. Su kompleksinio skaičiaus sąvoka susiduriame sprendžiant kvadratines lygtis. Antai, lygties

$$x^2 + px + q = 0 \tag{1.1}$$

sprendinius galime užrašyti formule

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Jei $\frac{p^2}{4} - q < 0$, (1.1) lygtis realiųjų šaknų neturi. Pažymėjus $\sqrt{-1} = i$, šaknis x_1 ir x_2 galima užrašyti:

$$x_1 = \alpha + i\beta,$$
$$x_2 = \alpha - i\beta;$$

čia $\alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

Skaičius $i = \sqrt{-1}$ vadinamas **menamu vienetu**.

Apibrėžimas. *Skaičius $a + ib$, kuriame $i = \sqrt{-1}$, a ir b – bet kurie realieji skaičiai, vadinamas* **kompleksiniu skaičiumi**.

Jei $b = 0$, skaičius $a + ib = a$ yra realusis skaičius. Taigi, realieji skaičiai yra kompleksinių skaičių dalis. Kai $a = 0$, skaičius ib vadinamas menamuoju (menamu) skaičiumi (kartais jis vadinamas grynai menamu skaičiumi).

Kompleksinis skaičius $a+ib$ natūraliai susideda iš dviejų komponenčių (dalių):
a – realioji dalis (realioji komponentė),
b – menamoji dalis (menamoji komponentė).

1.2. **Kompleksinių skaičių vaizdavimas plokštumoje. Modulis ir argumentas.** Pasirinkę plokštumoje stačiakampę koordinačių sistemą (1 brėž.), kompleksinį skaičių $z = x+iy$ vaizduosime tašku (x, y). Žymėsime $x = Rez, y = Imz$. Kiekvieną skaičių $z = x + iy$ atitiks vienas plokštumos taškas (x, y) ir atvirkščiai – bet kuris plokštumos taškas bus vieno kompleksinio skaičiaus vaizdas.

Plokštumą, kurioje atvaizduoti kompleksiniai skaičiai, vadiname **kompleksine plokštuma**. Abscisių (arba x) ašis vadinama **realiąja ašimi**. Būtent, realiųjų skaičių vaizdai yra šioje ašyje. Ordinačių (arba y) ašis vadinama **menamąja ašimi**.

Atkreipiame dėmesį, kad tašku (x, y) vaizduojamas taip pat dvimatis vektorius. Labiau įprasta, dvimatį vektorių

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

vaizduoti ne tašku (x, y), o orientuota atkarpa (2 brėž.) Todėl ir kompleksinį skaičių $x + iy$, jei reikia galima vaizduoti ne tašku (x, y), o vektoriumi.

Taip vaizduojant, vektoriaus ilgis

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

vadinamas kompleksinio skaičiaus **moduliu** ir žymimas $|z|$. Iš 2 brėž. matyti, kad

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Realaus skaičiaus (kai $y = 0$) modulis sutampa su jo absoliutiniu didumu

$$|z| = |x + i \cdot 0| = |x|.$$

Jei $z \neq 0$, tai kampas φ tarp teigiamosios realiosios ašies ir vektoriaus z vadinamas kompleksinio skaičiaus **argumentu** ir žymimas

$$\varphi = arg\, z$$

Pastaba: Kartais naudojamas žymėjimas $Arg\, z$:

$$Arg\, z = argz + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Paprastai laikome

$$0 \leq \varphi = arg\, z < 2\pi$$

(galima būtų laikyti: $-\pi \leq \varphi < \pi$).

1 Pvz. $z = 1 + i$.

$$Rez = 1, \quad Imz = 1, \quad |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

3. **Trigonometrinė kompleksinio skaičiaus forma.** Iš 2 brėž. lengvai užrašome:

$$\frac{y}{r} = \sin\varphi, \quad \frac{x}{r} = \cos\varphi,$$

t.y.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Taigi, bet kurį kompleksinį skaičių $z = x + iy \neq 0$ galime užrašyti taip:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.3}$$

Sakome, kad (1.3) formule užrašytas kompleksinis skaičius yra užrašytas trigonometrine forma. (1.3) formulėje

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

φ yra kompleksinio skaičiaus argumentas.

2 Pvz. $z = 1 + i$.
Kadangi $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, tai

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

arba pilniau

$$z = \sqrt{2}\Big(\cos(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)\Big).$$

3 Pvz. Užrašykime kompleksine forma skaičių i. Čia $|i| = 1$, $arg\, i = \frac{\pi}{2}$. Todėl

$$i = \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi).$$

Pastaba. Atkreipiame dėmesį į tokį faktą. Nors kompleksinio skaičiaus modulis užrašomas nevienareikšmiai $(\varphi, \varphi+2\pi, \varphi+4\pi, \ldots)$, bet dydžiai $\cos(\varphi + 2k\pi)$ ir $\sin(\varphi + 2k\pi)$ yra apskaičiuojami vienareikšmiai.

1.4. **Kompleksinių skaičių sudėtis, atimtis, daugyba ir dalyba.** Dviejų kompleksinių skaičių $z_1 = x_1 + iy_1$ ir $z_2 = x_2 + iy_2$ suma apibrėžiama lygybe

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \tag{1.4}$$

o atimtis –

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \tag{1.5}$$

Dabar išsiaiškinsime, kaip reikėtų dauginti du kompleksinius skaičius. daugindami z_1 iš z_2 kaip dvinarį iš dvinario ir atsižvelgdami į tai, kad $i^2 = -1$, gauname

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) \tag{1.6}$$

Čia ir yra dviejų kompleksinių skaičių daugybos taisyklė.

4 Pvz. Sudauginkime du tokius kompleksinius skaičius:

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_1 - iy_1.$$

Sutinkamai su (1.6) formule, gausime

$$(x_1 + iy_1)(x_1 - iy_1) = x_1^2 + y_1^2 + i(x_1y_1 - x_1y_1) = x_1^2 + y_1^2.$$

Gavome realųjį skaičių.

Apibrėžimas. *Du kompleksiniai skaičiai, kurių realiosios komponentės yra lygios, o menamosios komponentės viena nuo kitos skiriasi tik ženklu, vadinami* **jungtiniais** *kompleksiniais skaičiais.*

Taigi, $x_1 + iy_1$ ir $x_1 - iy_1$ yra tarp savęs jungtiniai kompleksiniai skaičiai. Dviejų jungtinių skaičių sandauga yra realieji skaičiai. Realus skaičius yra ir dviejų jungtinių skaičių suma.

Dabar dalinkime du kompleksinius skaičius. Šitai atliksime tokiu keliu:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

(1.7) formule apibrėžiamas dalybos veiksmas.

5 Pvz. Sudauginkime du kompleksinius skaičius, užrašytus trigonometrine forma:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2\{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\} = \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Taigi, gavome taisyklę: dauginant du kompleksinius skaičius, jų moduliai sudauginami, o argumentai sudedami, t.y.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

$$Arg\,(z_1 \cdot z_2) = Arg\, z_1 + Arg\, z_2.$$

Naudojantis paskutiniąja lygybe, gali pasitaikyti, kad imant $0 \le \varphi_1 < 2\pi$ ir $0 \le \varphi_2 < 2\pi$, gausime $\varphi_1 + \varphi_2 \ge 2\pi$, pvz.

$$\varphi_1 = \frac{3}{2}\pi, \quad \varphi_2 = \pi, \quad \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{5}{2}\pi = \frac{\pi}{2} + 2\pi.$$

Kaip šiuo atveju užrašysime kompleksinį skaičių ar

$$z = r_1 r_2(\cos(\frac{\pi}{2} + 2\pi) + i\sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi))$$

ar

$$z = r_1 r_2(\cos(\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}))$$

neturi reikšmės, nes

$$\cos(\frac{\pi}{2} + 2\pi) = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

6 Pvz. Padalinkime du kompleksinius skaičius, užrašytus trigonometrine forma

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} = \\ &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).\end{aligned} \tag{1.9}$$

Iš čia gavome taisyklę: dalydami kompleksinius skaičius, jų modulius padaliname, o argumentus atimame:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad Arg\frac{z_1}{z_2} = Arg z_1 - Arg z_2.$$

1.5. **Kėlimas laipsniu ir šaknies traukimas.** Imdami ne du, o daugiau kompleksinių skaičių

$$z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

galime apibendrinti daugybos formulę (1.8):

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = r_1 r_2 \ldots r_n\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)\big).$$

Kai $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$, iš čia gauname kompleksinio skaičiaus

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

kėlimo natūriniu laipsniu n formulę

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{1.10}$$

Kompleksinio skaičiaus z n-tojo laipsnio šaknimi, žymima $\sqrt[n]{z}$, laikysime tokį kompleksinį skaičių w, kurio n-tasis laipsnis lygus z, t.y.

$$\sqrt[n]{z} = w, \quad \text{jei} \quad w^n = z.$$

Pažymėkime $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\Theta + i\sin\Theta)$. Tada turi būti

$$w^n = z,$$

t.y.

$$\rho^n(\cos n\Theta + i\sin n\Theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.11}$$

Čia vertėtų tiksliai suformuluoti, ką reiškia, kad du kompleksiniai skaičiai lygūs. Būtent, du kompleksiniai skaičiai lygūs, jei jų moduliai lygūs, o argumentai arba sutampa, arba skiriasi vienas nuo kito dydžiu, kartotiniu skaičiui 2π. Taigi, iš (1.11) gauname

$$\rho^n = r,$$

$n\Theta = \varphi + 2k\pi,\ k$ – sveikas skaičius.

Taigi $\rho = \sqrt[n]{r}$ (imama teigiama šaknies reikšmė)

$$\Theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Galutinai

$$\begin{aligned} w &= \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \\ &= \sqrt[n]{z}\big(\cos\tfrac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{\varphi+2k\pi}{n}\big). \end{aligned} \tag{1.12}$$

(1.12) formulėje k – bet kuris sveikas skaičius, bet reikia pastebėti, kad $\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}$ (atitinkamai ir sinusas) su visais skirtingais k įgauna tik n skirtingų reikšmių. Iš tikrųjų, jei k_1 ir k_2 yra dvi k reikšmės ir $k_1 - k_2 = n$, tai

$$\frac{\varphi + 2k_1\pi}{n} - \frac{\varphi + 2k_2\pi}{n} = 2\pi$$

taigi

$$\cos\frac{\varphi + 2k_1\pi}{n} = \cos\frac{\varphi + 2k_2\pi}{n}$$
$$\sin\frac{\varphi + 2k_1\pi}{n} = \sin\frac{\varphi + 2k_2\pi}{n}.$$

Taigi, formulėje (1.12), imdami

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

gausime visas (skirtingas) $\sqrt[n]{z}$ reikšmes.

7 Pvz. Rasime visas $\sqrt[4]{-4}$ reikšmes:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{-4} &= \sqrt[4]{4\big(\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)\big)} = \\ &= \sqrt{2}\big(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\big), \end{aligned}$$

k=0,1,2,3. Taigi,

$$\sqrt[4]{-4} = \begin{cases} \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 1 + i, & k = 0, \\ \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = -1 + i, & k = 1, \\ \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = -1 - i, & k = 2, \\ \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 1 - i, & k = 3. \end{cases}$$

Užduotis: Imdami bet kurią iš keturių $\sqrt[4]{-4}$ reikšmių, pakelkite surastą kompleksinį skaičių 4-tuoju laipsniu – turi gautis -4.

8 Pvz. Suraskite visas $\sqrt[n]{1}$ šaknis, t,y, išspręskite lygtį $z^n - 1 = 0$. Žinome, kad skirtingų reikšmių bus n.

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos(0 + 2k\pi) + i\sin(0 + 2k\pi)} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Imdami $n = 3$, gausime

$$\sqrt[3]{1} = \begin{cases} \cos 0 + i \sin 0 = 1, & k = 0, \\ \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, & k = 1, \\ \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}, & k = 2, \end{cases}$$

(žr. 3 brėž.)