8. Vektorių ir matricų normos

Vektoriaus ar matricos norma yra tam tikra charakteristika, nusakanti vektoriaus ar matricos didumą. Vektoriaus norma tai skaičiaus absoliutaus dydžio apibendrinimas. Todėl ir apibrėžiant normos sąvoką, iš esmės yra pakartojami tie svarbiausi reikalavimai, kurie būdingi skaičiaus absoliutaus dydžio sąvokai.

1.**Vektoriaus normos apibrėžimas**. Imkime n-matį vektorių

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'.$$

Padarykime prielaidą, kad x_i – kompleksiniai skaičiai, $i = \overline{1, n}$.

Apibrėžimas. Vektoriaus x **norma** vadinamas skaičius $\|x\|$, tenkinantis šias tris savybes:

$$\begin{aligned}
&1) \quad \|x\| > 0, \quad \text{jei } x \neq 0 \text{ ir } \|0\| = 0;\\
&2) \quad \|cx\| = |c| \cdot \|x\|, \quad \text{jei } c - \text{skaičius};\\
&3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.
\end{aligned}$$

Paaiškinimas. Lygybėje $\|0\| = 0$ po normos ženklu stovintis ,,0" yra vektorius, kurio visos koordinatės lygios nuliui.

Šiomis trimis savybėmis vektoriaus norma apibrėžiama nevienareikšmiai. Galimi įvairūs konkretūs normos apibrėžimo būdai.

2.**Vektoriaus normų pavyzdžiai**. Dažniausiai naudojami štai tokie konkretūs vektoriaus normos apibrėžimai.

1. atvejis: $\|x\|_1 = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Nesunku patikrinti, kad taip apibrėžta norma tenkina visas tris normos apibrėžimo savybes. Ištikrųjų:

1) jei $x \neq 0$, t.y. bent viena vektoriaus koordinatė x_i nelygi nuliui, tai, aišku,

$$\|x\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| > 0;$$

jei $x = 0$, t.y. $x_i = 0$ visoms $i = \overline{0, n}$ reikšmėms, tai

$$\|x\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 0;$$

2)

$$\|cx\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |cx_i| = \max_{1 \leq i \leq n} |c| \cdot |x_i| = |c| \cdot \|x\|_1;$$

3)

$$\|x + y\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i + y_i| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Pvz. $x = (-1, 0, 3)'$;

$$\|x\|_1 = \max\{1, 0, 3\} = 3.$$

2 atvejis: $\|x\|_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$. Visos trys normos apibrėžimo savybės patikrinamos analogiškai kaip ir normai $\|x\|_1$.

3 atvejis:

$$\|x\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}.$$

Šios normos geometrinė interpretacija – vektoriaus ilgis.

Galima pastebėti, kad yra be galo daug būdų taip apibrėžti vektoriaus x normą, kad būtų teisingos visos trys apibrėžimo savybės. Antai, vektoriaus normą galima apibrėžti taip:

$$\|x\|^{(p)} = \Big\{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big\}^{1/p}, \quad p = 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

Užduotis: Įsitikinkite, kad

$$\lim_{p\to\infty} \Big\{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big\}^{1/p} = \|x\|_1 = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

3.**Matricos normos apibrėžimas**. Matricos normą galima apibrėžti analogiškai vektoriaus normai. Tačiau verta pastebėti, kad vektorius yra tiesinės vektorinės erdvės elementas, o matrica yra operatorius šioje erdvėje. Todėl prie trijų reikalavimų prisideda vienas specifinis reikalavimas, būdingas operatoriams: į matricos normos apibrėžimą įjungiame tam tikrą reikalavimą, susijusį su matricų sandauga.

Apibrėžimas. Matricos $A = \{a_{ij}\}$ **norma** vadinamas skaičius $\|A\|$, turintis šias savybes:

$$\begin{aligned}
&1) \quad \|A\| > 0, \quad \text{jei } A \ne 0 \text{ ir } \|0\| = 0;\\
&2) \quad \|cA\| = |c| \cdot \|A\|, \quad \text{jei } c - \text{skaičius};\\
&3) \quad \|A + B\| \le \|A\| + \|B\|\\
&4) \quad \|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|
\end{aligned}$$

Imant kokrečią matricos normos išraišką, tenkinančią minėtas keturias savybes, reikia dar taip parinkti matricos normą, kad ji būtų suderinta su vektoriaus norma.

Apibrėžimas. Matricos norma yra **suderinta** su vektoriaus norma, jei teisinga nelygybė:

$$\|A\| \le \|A\| \cdot \|x\|.$$

4. **Matricos normų pavyzdžiai**. Dažniausiai naudojamos šios trys matricos normos:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_2 = \max_{1\le i\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_3 = \sqrt{\max_{1\le i\le n} |\lambda_i(A^*A)|}.$$

Jei matricos A elementai yra realieji skaičiai, tai

$$\|A\|_3 = \sqrt{\max_{1\le i\le n} |\lambda_i(A'A)|}.$$

Svarbi **pastaba**: Jei A – simetrinė matrica, tai

$$\lambda_i(A'A) = \lambda_i(A^2) = \Big[\lambda_i(A)\Big]^2,$$

taigi

$$\sqrt{\max_{1\le i\le n} |\lambda_i(A'A)|} = \sqrt{\max_{1\le i\le n} \big[\lambda_i(A)\big]^2} = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i(A)|.$$

Taigi, simetrinėms matricoms

$$\|A\|_3 = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i(A)|,$$

t.y. simetrinėms matricoms trečioji norma lygi tikrinių reikšmių absoliutinių dydžių maksimumui. Taigi, šiuo atveju, maksimali absoliutiniu dydžiu tikrinė reikšmė yra matricos (simetrinės) „didumo" charakteristika.

Teorema. *Bet kuriai matricai A ir bet kuriai jos normai yra teisinga nelygybė*

$$|\lambda(A)| \le \|A\|,$$

t.y. bet kuri matricos tikrinė reikšmė moduliu neviršija bet kurios matricos normos.

Įrodymas. Imkime matricos A bet kurią tikrinę reikšmę λ ir jai atitinkantį tikrinį vektorių x. Turime

$$Ax = \lambda x, \quad x \ne 0.$$

Taigi

$$\|Ax\| = |\lambda x|, \quad x \ne 0.$$

Pagal suderinamumo sąlygą

$$\|Ax\| = \|A\| \cdot \|x\|,$$

taigi

$$|\lambda| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|.$$

Kadangi $x \neq 0,\ \|x\| > 0$, tai

$$\|\lambda\| \leq \|A\|.$$

Teorema įrodyta.