3.Tiesinės vektorinės erdvės

3.1. **Tiesinės erdvės.** Tiesinės erdvės sąvoka yra viena pagrindinių matematikos šakos – funkcinės analizės – sąvokų. Čia pateikiamos tik pagrindinės elementarios tiesinės erdvės savybės. Vienas iš paprasčiausių ir gana svarbių tiesinės erdvės pavyzdžių – tiesinės vektorinės erdvės. Būtent, tiesinėje vektorinėje erdvėje apibrėžiama matrica kaip vektoriaus atvaizdis (operatorius).

Apibrėžimas. *Elementų $x, y, z, \ldots$ aibė E vadinama* **tiesine erdve***, jei*

1. *yra taisyklė, kuri dviems bet kuriems aibės E elementams x ir y priskiria trečiąjį šios aibės elementą $x + y \in E$ vadinamą šių elementų suma;*
2. *yra taisyklė, kuri bet kuriam aibės E elementui x ir bet kuriam skaičiui α priskiria elementą $\alpha x \in E$ vadinamą skaičiaus α ir elemento x sandauga.*

Keletas žodžių dėl elementų $x + y$ ir αx savybių. Šios sąvokos (elementų suma ir elemento sandauga iš skaičiaus) turi pasižymėti šiomis savybėmis:

1. $x + y = y + x$ (komutatyvumas);
   $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asociatyvumas);
   $\exists$ vienintelis elementas 0 toks, kad $0 + x = x + 0 = x$; kiekvienam $x \in E$ $\exists y \in E$ toks, kad $x + y = 0$, t.y $y = -x$;
2. $1 \cdot x = x$;
   $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
   $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
   $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Tiesinės erdvės apibrėžime vietoje dviejų savybių galima suformuluoti vieną – apibendrintą savybę. Taigi ekvivalentus yra toks apibrėžimas:

Apibrėžimas. *Elementų $x, y, z, \ldots$ aibė E vadinama* **tiesine erdve***, jei bet kuriems aibės x, y elementams ir bet kuriems skaičiams α, β*

$$\alpha x + \beta y \in E.$$

Elementas $\alpha x + \beta y$ vadinamas elementų x ir y tiesine kombinacija.

Tiesinių erdvių pavyzdžiai.

1 Pvz. Tolydžių funkcijų aibė. Aišku, ši aibė – tiesinė erdvė: jei $f(x)$ – tolydi funkcija, $g(x)$ – tolydi funkcija, tai ir $\alpha f(x) + \beta g(x)$ – irgi tolydi funkcija.

2 Pvz. Algebrinių daugianarių iki n-tosios eilės imtinai aibė. Ištikrųjų, jei $f(x)$ ir $g(x)$ – neaukštesnės kaip n-tosios eilės daugianariai, tai $\alpha f(x) + \beta g(x)$ – irgi yra neaukštesnės kaip n-tosios eilės daugianaris.

3 Pvz. n-tosios eilės daugianarių aibė. Ši aibė – nėra tiesinė erdvė. Ištikrųjų, imkime du antrosios eilės daugianarius

$$x^2 - 2x + 1 \quad \text{ir} \quad -x^2 + 3x - 8$$

bet šių daugianarių suma

$$x^2 - 2x + 1 + (-x^2 + 3x - 8) = x - 7$$

nėra antrosios eilės daugianaris.

4 Pvz. Atskiras atvejis aibių, nagrinėtų antrame ir trečiame pavyzdžiuose – tai skaičių aibė. Skaičių aibė – tiesinė erdvė.

5 Pvz. Trikampių aibė. Tai nėra tiesinė erdvė (nėra apibrėžta trikampių sudėtis, taip pat daugyba iš skaičiaus; skyrium imant, ką reiškia $x + y = 0$ ir pan.).

6 Pvz. n-tosios eilės vektoriai (vektoriai, turintys n komponenčių). Jei x ir y – to paties n-tojo matavimo vektoriai

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

tai $\alpha x + \beta y$ – irgi n-tojo matavimo vektorius (n-matis vektorius):

$$\alpha x + \beta y = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_1 + \beta y_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{pmatrix}.$$

Įvesime poerdvio sąvoką.

Apibrėžimas. *aibė $F \subset E$ vadinama tiesinės erdvės E tiesiniu poerdviu, jei bet kurių elementų $x, y \in F$ tiesinė kombinacija $\alpha x + \beta y \in F$.*

Tiesinio poerdvio pavyzdžiai.

7 Pvz. E– tolydžių funkcijų erdvė, F – tolydžių funkcijų, turinčių tolydžią išvestinę. poerdvis.

8 Pvz. E – daugianariai neaukštesnio kaip n-tojo laipsnio, F – neaukštesnio kaip m-tojo laipsnio daugianariai, $m < n$.

9 Pvz. E – trimačių vektorių erdvė, F – trimačių vektorių erdvė, kurių trečioji koordinatė lygi 0. Kitaip tariant, E – vektoriai, priklausantys trimatei erdvei, F – vektoriai, esantys vienoje plokštumoje.

3.2. **Tiesiškai nepriklausomi elementai. Erdvės bazė.** Imkime n tiesinės erdvės E elementų: $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$. Imkime n skaičių: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Sudarykime erdvės elementų tiesinę kombinaciją

$$\alpha_1\bar{x}^1 + \alpha_2\bar{x}^2 + \ldots + \alpha_n\bar{x}^n.$$

Apibrėžimas. *Tiesinės erdvės elementai* $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$ *yra* **tiesiškai nepriklausomi**, *jei lygybė*

$$\alpha_1\bar{x}^1 + \alpha_2\bar{x}^2 + \ldots + \alpha_n\bar{x}^n \tag{1}$$

teisinga tada ir tik tada, kai $\alpha_i = 0, i = 1, 2, \ldots, n$.

Jei (1) lygybė galima, kai bent vienas skaičius $\alpha_i \neq 0$, tai elementai $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$ yra **tiesiškai priklausomi**.

Tarkime, kad elementai $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$ yra tiesiškai priklausomi, t.y. (1) lygybėje bent viena konstanta α_i nelygi nuliui, pvz., tegu $\alpha_i \neq 0$. Tada visus lygybės narius galime padalinti iš šios konstantos α_1 :

$$\bar{x}^1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\bar{x}^2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\bar{x}^n.$$

Taigi, jei elementai yra tiesiškai priklausomi, tai bent vienas elementas iš jų gali būti išreikštas kitų elementų tiesine kombinacija.

Aišku, jei tarp elementų $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$ yra bent vienas nulinis elementas, tai šie elementai būtinai yra tiesiškai priklausomi. Ištikrųjų, prie nulinio elemento imdami konstantą, nelygią nuliui, o prie kitų elementų imdami $\alpha_i = 0$, gausime, kad (1) lygybė visada teisinga.

10 Pvz. Imkime tiesinę erdvę, kurios elementais yra neaukštesnio kaip n-tojo laipsnio daugianariai. Nesunku įsitikinti, kad elementai

$$1, x, x^2, \ldots, x^n$$

yra tiesiškai nepriklausomi. Ištikrųjų, imkime tiesinę kombinaciją

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n$$

Jei ši tiesinė kombinacija būtų lygi nuliui, tai reikštų, kad visoms x reikšmėms daugianario reikšmė lygi nuliui t.y. visi skaičiai yra daugianario šaknys. Bet to negali būti. Taigi, elementai

$$1, x, x^2, \ldots, x^n$$

yra tiesiškai nepriklausomi.

11 Pvz. Imkime tris elementus (neaukštesnius kaip pirmojo laipsnio daugianarius):

$$1, x, 2x + 3.$$

Ar šie elementai yra tiesiškai priklausomi, ar tiesiškai nepriklausomi? Jie yra tiesiškai priklausomi, kadangi galima parinkti nenulinius skaičius:

$$-3,\ -2,\ 1,$$

tokius, kad

$$-3 \cdot 1 - 2 \cdot x + 1 \cdot (2x + 3) = 0.$$

Apibrėžimas. Elementai $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$ vadinami tiesinės erdvės **baze** (sudaro tiesinės erdvės bazę), jei

a) jie yra tiesiškai nepriklausomi,

b) bet kuris erdvės elementas x išreiškiamas šių elementų tiesine kombinacija:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \bar{x}^k. \tag{2}$$

12 Pvz. imkime neaukštesnio kaip n-tojo laipsnio daugianarių tiesinę erdvę. Šios erdvės bazę sudaro elementai

$$1, x, x^2, \ldots, x^n.$$

Ištikrųjų, 10 Pvz. parodyta, kad šie elementai yra tiesiškai nepriklausomi. Toliau, bet kuris neaukštesnio kaip n-tojo laipsnio daugianaris $f(x)$ gali būti užrašytas pavidalu:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n.$$

Taigi, teisinga (2) išraiška.

Pastaba. Iš bazės apibrėžimo seka, kad elementų visuma sudaro bazę, kai tų elementų yra ne per daug (t.y. elementai yra tiesiškai nepriklausomi, o jei jų būtų per daug, jie galėtų būti tiesiškai priklausomi) ir ne per mažai (jei jų būtų mažai, tai ne visus x galima būtų išreikšti (2) pavidalu).

3.3. **Tiesinės vektorinės erdvės.** Tiesinę erdvę, kurios elementais yra n-mačiai vektoriai

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)',$$

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)', \quad \text{ir} \;\; \text{t.t.},$$

vadinsime n-mate vektorine erdve E_n.

1 Teorema. *Vektorinėje erdvėje E_n egzistuoja bazė, kurią sudaro n vektorių.*

Įrodymas. Sukonstruosime bazę iš n vektorių. Apibrėžkime štai tokius vienetinius vektorius:

$$\bar{\delta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\delta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \bar{\delta}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Įrodysime, kad šie vektoriai yra tiesiškai nepriklausomi. Tarkime, kad

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \bar{\delta}_k = 0,$$

t.y

$$\bar{\alpha}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{\alpha}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \bar{\alpha}_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

arba

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0, \quad \text{t.y.} \quad \alpha_k = 0, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Taigi, $\bar{\delta}_k$ yra tiesiškai nepriklausomi.

2) Imkime bet kurį n-matį vektorių $\bar{x}$. Įrodysime, kad jį galime išreikšti vektorių $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \ldots, \bar{\delta}_n$ tiesine kombinacija. Perdirbame vektorių $\bar{x}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Taigi, vektoriai $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \ldots, \bar{\delta}_n$ tenkina abi bazės savybes. Teorema įrodyta.

Svarbus atsakymas į klausimą, kiek yra bazių erdvėje E_n. Atsakymas duodamas sekančioje teoremoje, būtent, pasirodo, bazių yra be galo daug.

2 Teorema. *Bet kurie n tiesiškai nepriklausomi vektoriai $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$ sudaro erdvės E_n bazę.*

Įrodymas. Vektoriai yra tiesiškai nepriklausomi. Kad jie sudarytų bazę, belieka įrodyti, kad bet kurį vektorių $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ galima išreikšti vektorių $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$ tiesine kombinacija. Taigi, reikia įrodyti, kad visuomet atsiras tokie skaičiai $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, kad

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \bar{x}^j. \tag{3}$$

Užrašykime šią lygybę koordinatiniu pavidalu:

$$\alpha_1 x_i^1 + \alpha_2 x_i^2 + \ldots + \alpha_n x_i^n = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Kadangi $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$ – tiesiškai nepriklausomi, tai iš lygybės

$$\alpha_1 x_i^1 + \alpha_2 x_i^2 + \ldots + \alpha_n x_i^n = 0,$$

seka $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Taigi, homogeninė lygčių sistema

$$\alpha_1 x_i^1 + \alpha_2 x_i^2 + \ldots + \alpha_n x_i^n = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

turi tik trivialų sprendinį:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Taigi, sistemos determinantas

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^1 & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Todėl nehomogeninė lygčių sistema (4) turi vienintelį sprendinį $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Tuo pačiu įrodėme, kad išraiška (3) galima. Teorema įrodyta.

3.4. **Koordinačių transformacija ir jos matrica.** n-matėje vektorinėje erdvėje E_n imkime kurias nors dvi bazes:

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n;$$
$$\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \ldots, \bar{\varepsilon}_n.$$

Užrašykime vektorių $\bar{\varepsilon}_j, \ j = 1, 2, \ldots, n$ bazės $\{\bar{e}_i\}$ elementais:

$$\bar{\varepsilon}_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} \bar{e}_i; \tag{5}$$

čia s_{ij} – tam tikri skaičiai. Dabar imkime bet kurį vektorių $\bar{x}$, po to išreikškime jį bazės $\{\bar{\varepsilon}_j\}$ elementais, o vėliau pasinaudokime formule (5), kad išreikštume vektorių $\bar{x}$ bazės $\{\bar{e}_i\}$ elementais:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \bar{\varepsilon}_j = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \Big(\sum_{i=1}^{n} s_{ij} \bar{e}_i \Big) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} s_{ij} \tilde{x}_j \Big) \bar{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i. \end{aligned}$$

Čia pažymėta:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \tilde{x}_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Šią lygybę užrašykime vektoriniu pavidalu, t.y. apjunkime x_i visiems i į vektorių.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \ldots & s_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n1} & s_{n2} & \ldots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

Arba sutrumpintai:

$$\bar{x} = S\tilde{x}, \tag{8}$$

čia S kvadratinė matrica

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \ldots & s_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n1} & s_{n2} & \ldots & s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Kiekviena iš formulių (6), (7), (8) atsako į klausimą, kaip vieno ir to paties vektoriaus $\bar{x}$ koordinatės bazėje $\{e_i\}$ gali būti išreikštos per koordinates bazėje $\{\varepsilon_i\}$. Kartu galime pasakyti taip: matrica S duoda mums galimybę (būdą) vieną vektorių $\tilde{x}$ pervesti į kitą vektorių $\bar{x}$.

3.5. **Tiesiniai operatoriai ir jų matricos.** Įveskime operatoriaus sąvoką. Tam tikra prasme operatoriaus sąvoka apibendrina funkcijos sąvoką. Paprasčiausiu atveju, funkcija tai taisyklė, kuri kiekvienam skaičių aibės E elementui priskiria vieną arba kelis kitos aibės $\bar{E}$ elementus. Analogiškai, operatorius tai taisyklė, kuri kiekvienam tiesinės erdvės E elementui priskiria vieną ar kelis kitos tiesinės erdvės $\bar{E}$ elementus.

Imkime dabar tiesinę vektorinę n-matę erdvę E_n. Apibrėžkime operatorių A, kuris kiekvienam erdvės E_n elementui x priskiria tos pačios erdvės E_n elementą y. Kol kas nagrinėsime tik tiesinius operatorius. (Tiesinė funkcija – tai $f(x) = ax + b$).

Apibrėžimas. *Operatorius A vadinamas* **tiesiniu** *operatoriumi, jei bet kuriems dviems erdvės E_n elementams ir bet kuriems skaičiams α ir β yra teisinga lygybė*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay. \tag{9}$$

Panagrinėkime, kokio pavidalo turi būti tiesinis operatorius tiesinėje vektorinėje erdvėje E_n. Erdvėje E_n imkime bazę: $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$. Imkime bet kuriuos du vektorius $\bar{x}$ ir $\bar{y}$:

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + \cdots + x_n\bar{e}_n,$$
$$\bar{y} = y_1\bar{e}_1 + \cdots + y_n\bar{e}_n,$$

Apibrėžkime

$$\bar{y} = A\bar{x},$$

A – tiesinis operatorius. Perdirbkime išraišką $A\bar{x}$:

$$\bar{y} = A\bar{x} = A(\sum_{j=1}^{n} x_j\bar{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j A\bar{e}_j. \tag{10}$$

Išreikškime vektorių $A\bar{e}_j$ baziniais vektoriais: $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$:

$$A\bar{e}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\bar{e}_i.$$

Įstatome šią išraišką į (10):

$$A\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\bar{e}_i\Big) = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j\Big)\bar{e}_i = \sum_{i=1}^{n} y_i\bar{e}^i.$$

Taigi,

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

arba

$$\bar{y} = A\bar{x}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Išvada: Padarius prielaidą. kad A – tiesinis operatorius ir $y = Ax$, gauname, kad A – kvadratinė matrica. Taigi, tiesinis operatorius n-matėje vektorinėje erdvėje yra matrica. Ši išvada – vienas iš daugelio iliustracijų, kam reikalingos matricos.

3.6. **Matricų sandaugos formulė.** Naudodamiesi 3.5 skyrelio medžiaga išveskime formulę, kaip dauginti dvi matricas.

Imkime dvi matricas:

$$A = \{a_{ij}\}, \quad B = \{b_{ij}\}.$$

Pažymėkime

$$C = AB,$$

ir $C = \{c_{ij}\}$. Imkime bazę $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \ldots, \bar{e}^n$ ir bet kurį vektorių $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{e}_j.$$

Apskaičiuokime:

$$\begin{aligned} B\bar{x} &= B\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j \bar{e}_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} x_j B\bar{e}_j = \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \Big(\sum_{s=1}^{n} b_{sj}\bar{e}_s\Big) = \sum_{s=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{sj}x_j\Big)\bar{e}_s. \end{aligned}$$

Analogiškai

$$C\bar{x} = \sum_{s=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} c_{sj}x_j\Big)\bar{e}_s = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j\Big)\bar{e}_i. \tag{11}$$

Toliau

$$\begin{aligned} ABx &= A(Bx) = A\sum_{s=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{sj}x_j\Big) = \\ &= \sum_{s=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{sj}x_j\Big)Ae_s = \\ &= \sum_{s=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{sj}x_j\Big)\sum_{i=1}^{n} a_{is}\bar{e}_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}\Big)x_j\Big)\bar{e}_i. \end{aligned} \tag{12}$$

Sulygindami (11) ir (12) gauname

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}. \tag{13}$$

Čia ir matricų daugybos formulė. Čia parodyta, kodėl taip dauginamos matricos, o ne kokiu nors kitu būdu.

13 Pvz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 22 & 15 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 13 & 20 \end{pmatrix}.$$

Taigi, bendru atveju

$$AB \neq BA.$$

Jei $AB = BA$, matricos A ir B vadinamos komutatyviomis matricomis.